

Exercise 2.2.1 Proofs (using primitive rules)

S1 $P \not\vdash \sim\sim P$ \vdash direction

1	(1)	P	A
2	(2)	$\sim P$	A
1	(3)	$\sim\sim P$	1,2 RAA (2)

 \dashv direction

1	(1)	$\sim\sim P$	A
2	(2)	$\sim P$	A
1	(3)	P	1,2 RAA (2)

S2 $P \rightarrow Q, \sim Q \vdash \sim P$

1	(1)	$P \rightarrow Q$	A
2	(2)	$\sim Q$	A
3	(3)	P	A
1,3	(4)	Q	1,3 $\rightarrow E$
1,2	(5)	$\sim P$	2,4 RAA (3)

S4 $\sim P \rightarrow Q, \sim Q \vdash P$

1	(1)	$\sim P \rightarrow Q$	A
2	(2)	$\sim Q$	A
3	(3)	$\sim P$	A
1,3	(4)	Q	1,3 $\rightarrow E$
1,2	(5)	Q	2,4 RAA (3)

S6 $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$

1	(1)	$P \rightarrow Q$	A
2	(2)	$Q \rightarrow R$	A
3	(3)	P	A
1,3	(4)	Q	1,3 $\rightarrow E$
1,2,3	(5)	R	2,4 $\rightarrow E$
1,2	(6)	$P \rightarrow R$	5 $\rightarrow I$ (3)

S7 $P \vdash Q \rightarrow P$

1	(1)	P	A
2	(2)	Q	A
1	(3)	$Q \rightarrow P$	1 $\rightarrow I$ (2)